## I. **Préambule**

L'objet de ce problème est d'établir l'existence de sous-espaces vectoriels fermés invariants pour certaines classes d'opérateurs linéaires sur l'espace des séries de carré sommable. Le cas des espaces réels est considéré dans les quatre premières parties. Les deux dernières parties concernent le cas complexe.

On notera $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres réels et des nombres complexes respectivement. $\mathbf{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par $\mathbf{Z}$, telle que les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} |u_{-n}|$$

soient convergentes. On écrit alors que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |u_n| < \infty$$

et de plus l'on note

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

Les quatre premières parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

## I. **Distance à un convexe fermé**

On note $l^2(\mathbf{Z})$ l'espace vectoriel réel des suites $x = (x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres réels indexées par $\mathbf{Z}$ telles que

$$\|x\| = \left[\sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k^2\right]^{1/2} < \infty.$$

On rappelle que la fonctionnelle définie ci-dessus est une norme sur l'espace $l^2(\mathbf{Z})$. Pour $x \in l^2(\mathbf{Z})$ et $y \in l^2(\mathbf{Z})$, on pose

$$< x, y >= \sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k y_k.$$

On admettra sans justification que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $l^2(\mathbf{Z})$.

1. Soient $u$ et $v$ deux éléments de $l^2(\mathbf{Z})$. Montrer que

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

2. L'objet de cette question est de montrer que l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ est complet pour la norme définie ci-dessus. Soit $(v(n))_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $l^2(\mathbf{Z})$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tel que si $n, l \geqslant N(\varepsilon)$, alors

$$\|v(n) - v(l)\| \leqslant \varepsilon.$$

a) Montrer qu'alors on a, pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tous $n, l \geqslant N(\varepsilon)$

$$|v(n)_k - v(l)_k| \leqslant \varepsilon.$$

b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} v(n)_k = v_k$ existe pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

c) Montrer qu'il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que

$$\left[\sum_{|k|\geqslant K} v(N(\varepsilon))_k^2\right]^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

d) Montrer que pour tout $L \geqslant K$, on a

$$\left[\sum_{L\geqslant|k|\geqslant K} v_k^2\right]^{1/2} \leqslant 3\varepsilon.$$

e) En déduire que l'on a $v \in l^2(\mathbf{Z})$, que

$$\lim_{n\to\infty} \|v(n) - v\| = 0$$

et donc que l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|$.

3. Soit $C$ un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $l^2(\mathbf{Z})$. Soit $(v(n))_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $C$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|v(n)\| = d$$

où $d = \inf\{\ \|v\|\ ;\ v \in C\}$.

a) Montrer que pour tous $n, l \in \mathbf{N}$, on a

$$\left\|\frac{1}{2}(v(n) - v(l))\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|v(n)\|^2 + \|v(l)\|^2) - d^2.$$

b) Montrer qu'il existe un unique point $v \in C$ tel que $\|v\| = d$.

4. On note $\partial C$ la frontière de $C$, c'est-à-dire l'intersection de $C$ et de l'adhérence de son complémentaire $l^2(\mathbf{Z})\backslash C$. On suppose dans cette question que $C$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de $l^2(\mathbf{Z})$, différent de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$.

a) Montrer que l'ensemble $\partial C\backslash\{0\}$ est non vide.

b) Montrer qu'il existe $v \in l^2(\mathbf{Z})$ tel que

$$0 < \inf\{\|v - x\|\ ;\ x \in C\ \} < \|v\|.$$

c) En déduire qu'il existe $p \in \partial C \backslash \{0\}$ tel que

$$\|v - p\| = \inf\{\|v - x\| \ ; \ x \in C \ \}.$$

d) Montrer que pour tout $q \in C$, on a

$$< v - p, q - p > \leqslant 0.$$

## II. **Exponentielles d'opérateurs**

1. Soit $T$ une application linéaire de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ dans lui-même. Montrer l'équivalence des trois conditions suivantes :

(i) $T$ est une application continue en tout point de $l^2(\mathbf{Z})$ ;

(ii) $T$ est continue en 0 ;

(iii) l'ensemble $\{\|T(x)\|; \ \|x\| \leqslant 1\}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}$.

On désigne par $L(l^2(\mathbf{Z}))$ l'ensemble des applications linéaires continues de $l^2(\mathbf{Z})$ dans lui-même. Pour $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$, on pose $\|T\|_L = \sup\{\|T(x)\|; \ \|x\| \leqslant 1\}$.

2. a) Montrer que $L(l^2(\mathbf{Z}))$ est un espace vectoriel et que la fonctionnelle $\| \cdot \|_L$ est une norme sur $L(l^2(\mathbf{Z}))$.

b) Soit $(T_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans l'espace $L(l^2(\mathbf{Z}))$ normé par $\| \cdot \|_L$. Montrer que pour tout $x \in l^2(\mathbf{Z})$, la suite $(T_n(x))_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy de $l^2(\mathbf{Z})$.

c) En déduire que l'espace $L(l^2(\mathbf{Z}))$ est complet pour la norme $\| \cdot \|_L$.

3. Soient $S$ et $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$. On note $TS$ l'élément de $L(l^2(\mathbf{Z}))$ obtenu en composant $S$ avec $T$ ; on a donc $TS = T \circ S$. Soit $I \in L(l^2(\mathbf{Z}))$ l'application identité définie par $I(x) = x$ pour tout $x \in l^2(\mathbf{Z})$. Pour tout $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$, on définit $T^j$ par récurrence sur $j \in \mathbf{N}$, par $T^0 = I$ et $T^{j+1} = TT^j$.

a) Montrer que l'on a $\|TS\|_L \leqslant \|T\|_L \|S\|_L$.

b) Pour tout entier $K \geqslant 0$, on pose

$$S_K(T) = \sum_{j=0}^{j=K} \frac{1}{j!} T^j$$

Montrer que la suite $(S_K(T))_{K \geqslant 0}$ converge dans l'espace $L(l^2(\mathbf{Z}))$.

c) On pose

$$\lim_{K \to \infty} S_K(T) = \mathrm{Exp}(T).$$

Montrer que si $A$ et $B$ sont deux éléments de $L(l^2(\mathbf{Z}))$ tels que $AB = BA$, alors

$$\mathrm{Exp}(A + B) = \mathrm{Exp}(A)\mathrm{Exp}(B)$$

(on pourra établir tout d'abord l'inégalité suivante :

$$\left\| \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}(A+B)^k - \Big(\sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!} A^j\Big)\Big(\sum_{l=0}^{l=n} \frac{1}{l!} B^l\Big) \right\|_L \leqslant \left( \sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!} \|A\|_L^j \right) \left( \sum_{l=0}^{l=n} \frac{1}{l!} \|B\|_L^l \right) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \left( \|A\|_L + \|B\|_L \right)^k).$$

## III. **Cônes fermés et sous-algèbres**

On appellera *sous-algèbre* de $L(l^2(\mathbf{Z}))$ un sous-espace vectoriel $\mathbf{A}$ de $L(l^2(\mathbf{Z}))$ tel que pour tout couple $(S,T)$ d'éléments de $\mathbf{A}$, on a $ST \in \mathbf{A}$.

1. Soit $\mathbf{D}$ l'ensemble constitué des applications linéaires $T$ telles qu'il existe une suite bornée $(t_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres réels telle que, pour tout $v=(v_k)\in l^2(\mathbf{Z})$, on a

$$T(v)_k = t_k v_k$$

pour tout $k\in\mathbf{Z}$. Montrer que $\mathbf{D}$ est une sous-algèbre de $L(l^2(\mathbf{Z}))$.

2. On note $P$ le sous-ensemble de $l^2(\mathbf{Z})$ défini par

$$P=\{v=(v_k)\in l^2(\mathbf{Z});\ v_k\in\mathbf{R}^+ \text{ pour tout } k\in\mathbf{Z}\}.$$

Soit $T\in L(l^2(\mathbf{Z}))$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) $T\in\mathbf{D}$.

(ii) Il existe $\lambda\in\mathbf{R}^+$ tel que pour tout $x\in P$, on ait $\lambda x - T(x)\in P$ et $\lambda x + T(x)\in P$.

3. Plus généralement, on appelle *cône fermé* un sous-ensemble convexe fermé $Q$ de $l^2(\mathbf{Z})$ tel que pour tout $x\in Q$ et tout $t\in\mathbf{R}^+$, on a $(tx)\in Q$. On note

$$\mathbf{A}_Q=\{T\in L(l^2(\mathbf{Z}))\ ;\ \text{il existe } \lambda\in\mathbf{R}^+ \text{ tel que } \lambda x - T(x)\in Q \text{ et } \lambda x + T(x)\in Q \text{ pour tout } x\in Q\}.$$

Montrer que $\mathbf{A}_Q$ est une sous-algèbre de $L(l^2(\mathbf{Z}))$.

4. Soit $Q$ un cône fermé.

a) Montrer que si $S\in L(l^2(\mathbf{Z}))$ satisfait $S(Q)\subset Q$, alors $\mathrm{Exp}(S)(Q)\subset Q$.

b) En déduire que si $T\in\mathbf{A}_Q$, alors $\mathrm{Exp}(T)(Q)\subset Q$.

## IV. **Construction de sous-espaces invariants**

Soit $\mathbf{A}$ une sous-algèbre de $L(l^2(\mathbf{Z}))$. On fait l'hypothèse suivante, notée (H) :

Il existe un convexe fermé $C_0$ de $l^2(\mathbf{Z})$, différent de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, tel que pour tout $T\in\mathbf{A}$, on a $\mathrm{Exp}(T)(C_0)\subset C_0$.

1. Montrer que si $Q$ est un cône fermé différent de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, l'algèbre $\mathbf{A}_Q$ satisfait l'hypothèse (H).

2. a) Montrer qu'il existe $p\in C_0\backslash\{0\}$ et $w\in l^2(\mathbf{Z})\backslash\{0\}$ tels que $<w, x-p>\leqslant 0$ pour tout $x\in C_0$ (on utilisera la question I.4.d).

Pour tout $T\in\mathbf{A}$, on définit une fonction $\phi_T$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par

$$\phi_T(s) = <w, \mathrm{Exp}(sT)(p)> .$$

b) Montrer que $\phi_T$ est une fonction développable en série entière.

c) Montrer que $\phi_T(s) \leqslant \phi_T(0)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

d) En déduire que $< w, T(p) >= 0$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

On continue à désigner par $p$ le vecteur obtenu dans cette question, jusqu'à la fin de la partie IV.

3. Montrer que s'il existe $T \in \mathbf{A}$ tel que $T(p) \neq 0$, alors l'adhérence $M$ de l'espace $M_0 = \{T(p);\ T \in \mathbf{A}\}$ est un sous-espace vectoriel fermé, distinct de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, tel que $T(M) \subset M$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

4. Montrer que si $T(p) = 0$ pour tout $T \in \mathbf{A}$, la droite vectorielle $D$ engendrée par $\{p\}$ vérifie que $T(D) \subset D$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

5. En déduire que si $\mathbf{A}$ est une sous-algèbre qui satisfait (H), alors il existe un sous-espace vectoriel fermé $V$, distinct de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, tel que $T(V) \subset V$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

## V. **Sous-espaces bi-invariants de shifts à poids**

On note $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ l'espace vectoriel complexe des suites $x = (x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres complexes indexées par $\mathbf{Z}$ telles que

$$\|x\| = \left[\sum_{k\in\mathbf{Z}} |x_k|^2\right]^{1/2} < \infty.$$

On rappelle que la fonctionnelle définie ci-dessus est une norme sur l'espace $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$. Pour $x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ et $y \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, on pose

$$< x, y >= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \overline{x}_k y_k.$$

On admettra sans justification que l'on définit ainsi un produit scalaire hermitien sur $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ une suite de nombres réels vérifiant la propriété suivante, notée $(B)$ :

$$0 < \inf\{\lambda_k;\ k \in \mathbf{Z}\} \leqslant \sup\{\lambda_k;\ k \in \mathbf{Z}\} < \infty. \qquad (B)$$

1. Pour $x = (x_k) \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, on définit une suite $S(x)$ de nombres complexes indexée par $\mathbf{Z}$ en posant pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$S(x)_k = \lambda_{k-1} x_{k-1}.$$

Dans le cas particulier où $\lambda_k = 1$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit $S_1$ par

$$S_1(x)_k = x_{k-1}.$$

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ une suite de nombres réels satisfaisant $(B)$, et soit $S$ l'opérateur correspondant. Montrer que $S$ définit une application linéaire continue inversible de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ sur $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, dont l'inverse $S^{-1}$ est également continu.

2. On définit une suite $(w_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de la façon suivante :

(i) $w_0 = 1$ ;

(ii) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\dfrac{w_{k+1}}{w_k} = \lambda_k$.

Soit $F$ l'espace vectoriel des suites $y = (y_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres complexes indexées par $\mathbf{Z}$ telles que $\{k;\ y_k \neq 0\}$ soit fini. On considère l'application linéaire $W : F \to F$ définie par

$$W(y)_k = w_k y_k$$

pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Montrer que

$$SW(y) = WS_1(y)$$

pour tout $y \in F$.

3. On suppose, dans cette question et jusqu'à la fin de la partie V, que pour tout $k \geqslant 0$, on a

$$\lambda_{-k-1} = (\lambda_k)^{-1}.$$

a. Montrer que $w_k = w_{-k}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

b. Soit $E = \{x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})\ ;\ x_{-k} = \overline{x}_k \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que la famille $(\varepsilon(j))_{j\in\mathbf{Z}}$ de vecteurs de $E$ définie par :

(i) $\varepsilon(0)_0 = 1$, $\varepsilon(0)_k = 0$ sinon,

(ii) si $j \geqslant 1$, $\varepsilon(j)_k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ si $k = \pm j$, $\varepsilon(j)_k = 0$ sinon,

(iii) si $j \leqslant -1$, $\varepsilon(j)_k = \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ si $k = j$, $\varepsilon(j)_k = \dfrac{-i}{\sqrt{2}}$ si $k = -j$, $\varepsilon(j)_k = 0$ sinon,

est orthonormée. En déduire que $E$ est un espace vectoriel réel isométrique à l'espace $l^2(\mathbf{Z})$.

4. Pour tout $y = (y_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in F$, on note $\widehat{y}$ le polynôme trigonométrique défini par

$$\widehat{y}(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} y_k e^{ikt}.$$

Montrer qu'alors $y \in E$ si et seulement si $\widehat{y}(t) \in \mathbf{R}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

5. On définit les applications linéaires

$$C = \frac{1}{2}[S + S^{-1}]$$

et

$$D = \frac{1}{2i}[S - S^{-1}]$$

a. Montrer que $C(E) \subset E$ et que $D(E) \subset E$.

b. On pose

$$P = \{W(y);\ y \in F \text{ et } \ \forall t \in \mathbf{R},\ \widehat{y}(t) \in \mathbf{R}^+\}.$$

Montrer que $P \subset E$ et que, pour tout $z = (z_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de $P$, on a $z_0 \geqslant 0$.

Établir que $(I - C)(P) \subset P$, que $(I + C)(P) \subset P$, que $(I - D)(P) \subset P$ et que $(I + D)(P) \subset P$.

c. En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé $M$ de $E$, distinct de $\{0\}$ et de l'espace $E$, tel que $C(M) \subset M$ et $D(M) \subset M$ (on utilisera en particulier les questions III.4 et IV.5).

6. a. Montrer que si $(u, v) \in E^2$, on a $\|u + iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

b. On pose $J = \{u+iv;\ (u, v) \in M^2\}$. Montrer que $J$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel complexe $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, distinct de $\{0\}$ et de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, tel que $S(J) \subset J$ et $S^{-1}(J) \subset J$.

## VI. **Sous-espaces bi-invariants fonctionnels.**

On garde les notations et les hypothèses de la partie V, questions 1 et 2. On suppose à présent que

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} w_k^{-2} < \infty.$$

1. Montrer que pour tout $x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, on a

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |w_k^{-1} x_k| < \infty.$$

2. Pour tout $x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$\Omega(x)(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} {w_k}^{-1} x_k e^{ikt}$$

et pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$, on définit

$$M_{t_0} = \{x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})\ ;\ \Omega(x)(t_0) = 0\}$$

Montrer que $M_{t_0}$ est un sous-espace fermé de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, distinct de $\{0\}$ et de l'espace $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ tout entier.

3. Montrer que $S(M_{t_0}) \subset M_{t_0}$ et que $S^{-1}(M_{t_0}) \subset M_{t_0}$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de sous-espace de dimension finie $X$ de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ distinct de $\{0\}$ tel que $S(X) \subset X$.

---